Catherine BERDONNEAU
I.U.F.M. de l'Académie de Versailles (Université de Cergy-Pontoise), département de mathématique

Mercredi 18 février 2009
Circonscription de Saint-Valéry-en-Caux

APPRENTISSAGES CLEFS DANS LE DOMAINE NUMERIQUE AUX CYCLES 1 ET 2

de la manipulation aux automatismes

PLAN

Rédaction Hélène Canu, CPC StValéry, revue par Catherine Berdonneau

APPRENTISSAGES CLEFS DANS LE DOMAINE NUMERIQUE AU CYCLE 1

A - Comparaison de collections

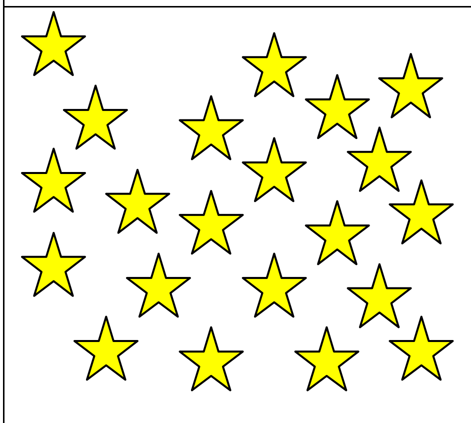
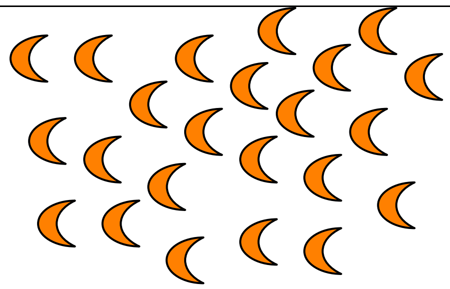
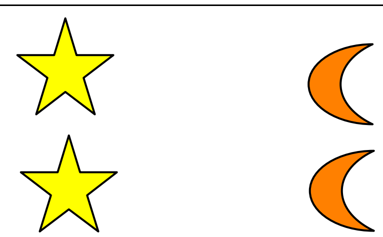
1 - C'est une activité pré-numérique (on n'a pas besoin de connaissances sur les nombres).
L'objectif essentiel est le geste mental d'énumération
Sa finalité première est de développer une compétence en énumération, c'est-à-dire d'apprendre à transformer, matériellement puis mentalement, un « tas » en « file ». Jointe à la mémorisation de la comptine numérique, entreprise tôt et avec ambition, elle permet le dénombrement qui, sans cela, se résume à la restitution d'un algorithme comportemental sans grande signification et d'une efficacité limitée.

Jusqu'à 6/7 ans, on peut observer le <u>phénomène de « quotité sans quantité »</u> (Pierre Greco)
On montre à l'enfant des jetons❍ ❍
❍ ❍ (adulte) « Combien de jetons ? » - (enfant) « Sept ! »
❍ ❍ ❍
On lui montre d'autres jetons (par exemple sur une table voisine)
❍ ❍ ❍
❍ ❍ ❍ ❍ (adulte) « Combien de jetons ? » - (enfant) « Sept ! »
(adulte) « Plus de jetons rouges ? plus de jetons bleus ? autant de bleus que de rouges ? »
(enfant) « ???!!! »
Bien que l'enfant ait su indiquer combien de jetons contient chaque collection, il n'en tire aucune conclusion quant à la comparaison des deux collections.
Ce phénomène s'observe assez peu sur des petites quantités (1-5), mais assez fréquemment pour des quantités un peu plus importantes (6-12) que l'enfant sait pourtant dénombrer sans difficulté.

Même un adulte, pour comparer deux collections, n'utilise pas nécessairement une procédure numérique : face à un grand carton comportant une importante quantité de jetons rouges et de jetons bleus, il est plus facile d'opérer en sortant, terme à terme ou paquet par paquet, un jeton bleu/un jeton rouge ou une petite collection de jetons bleus et une collection comportant autant de jetons rouges (trois bleus avec trois rouges…) jusqu'à ce qu'on soit capable de répondre à la question parce qu'il ne reste que peu de jetons.

LE NOMBRE PEUT ETRE UTILISE COMME MEMOIRE DE LA QUANTITE… EST UNE COMPETENCE A CONSTRUIRE.

2 - Le geste mental d'énumération
Passer d'un tas à une file (d'attente avec le premier, le cinquième… celui qui est avant X, après Z…)

Plus de lunes ou plus d'étoiles?		→→ Transformer le « tas » en « file »
		
	←←En variant les procédures spatiales (savoir quel est le premier n'a pas nécessairement d'importance) En variant les procédures gestuelles →→	

L'élève doit prendre en compte simultanément les deux collections.
Il est indispensable de confronter l'élève à de « grandes » collections [10-12 éléments en P.S., 40 éléments ou plus en G.S.], ayant « à peu près » le même nombre d'éléments, sinon, il n'y a pas de problème à régler (face à une situation où la réponse est immédiate, il n'y a ni question ni apprentissage).
Dans la mise en œuvre :

- utiliser de « vraies » collections (constituées d'éléments déplaçables) ayant beaucoup d'éléments, de préférence à de petites collections représentées
- proposer des gestes divers, n'aboutissant pas à la même disposition spatiale (files en vis-à-vis, paires côte-à-côte ou par superposition dispersées dans l'espace disponible, ...) mais relevant de la même démarche de correspondance terme à terme (la correspondance paquets par paquets a mieux sa place en C.P.) plutôt qu'un unique algorithme gestuel.

3 – Variables didactiques
Reprendre, au cours des trois années de maternelle, ces activités qui visent le geste mental d'énumération, mais dans des contextes et conditions différents

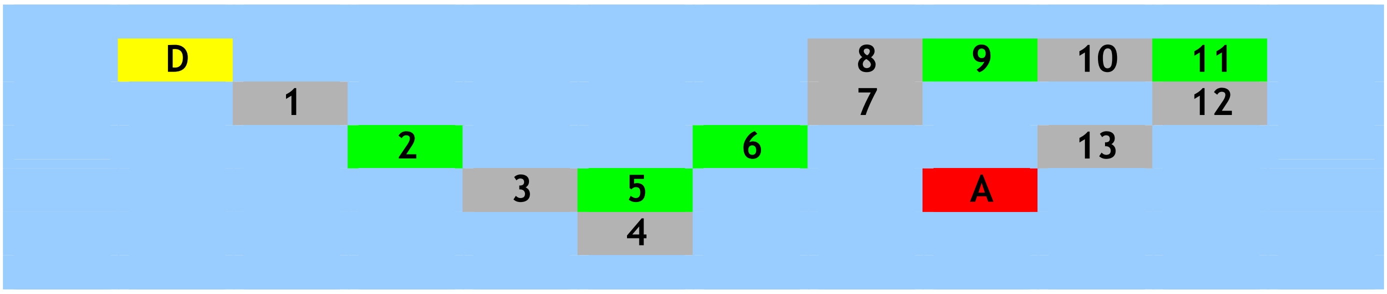
-Collections homogènes: lunes/jetons
-Collections hétérogènes : récipients/invités, jeux individuels dans un sac/élèves à une table
-Taille des collections (MS : 15 à 20 – GS : 40 à 60)

Les élèves peuvent se débrouiller sans compter ; il ne faut pas les restreindre à une stratégie de comptage, qui n'est efficace que si l'élève dispose d'une maîtrise des quantités et du nombre généralement pas encore atteinte ; cela viendra plus tard.
Penser à introduire d'éventuels leurres perceptifs (5 souris, 3 éléphants)

B - Mémorisation de la suite des noms de nombres

Cette mémorisation doit être entreprise dès la TPS en répartissant l'effort sur les 3 sections.
En PS, jusqu'à 8-10
En MS, jusqu'à 15-20
En GS, 30 et plus. Mais, pour assurer un passage en CP dans de bonnes conditions, il est indispensable que l'élève ait mémorisé cette suite jusqu'à 16 inclus car jusqu'à cette valeur les noms ne peuvent pas être « inventés », « reconstruits ».
La mémorisation se met en place progressivement, à l'aide :

– de comptines variées (remarque : à « dix, onze, d*ouze*... elles seront toutes r*ouges* », préférer « dix, onze, d*ouze*, au bois de Toul*ouse* »)
– de jeux
    - le tunnel numérique : en chœur, dire la suite des noms des nombres. L'enseignant a un paravent (feuille A3 ou carton). Quand sa main est devant le paravent (visible des élèves), on dit le nom du nombre à haute voix ; quand sa main est derrière le paravent (cachée, du oint de vue des élèves), on dit le nom du nombre dans sa tête) – On peut, en C2-C3, envisager des variantes avec les tables de multiplication…
    - « Plouf dans l'eau » (Ermel GS)



Le plateau de jeu (fond bleu) représente une rivière, sur laquelle est figuré un gué. Les cases numérotées sont recouvertes de jetons numérotés, gris pour représenter des pierres ou verts, des nénuphars.
<u>Conseil :</u> pour que ce jeu soit facilement utilisable plusieurs fois et que les élèves ne reposent pas sur

la mémorisation des noms des nombres assurant de gagner le parcours, faire les jetons sur du carton bicolore (une face verte et une face grise).
But du jeu : dire le nom des nombres sans se tromper
Quand on est sur une pierre grise, on dit le nom du nombre à haute voix. Quand on est sur un nénuphar vert, on dit le nom du nombre dans sa tête. Quand on se trompe, les autres élèves disent : « Plouf dans l'eau », le joueur a perdu son tour, on passe au joueur suivant.

On trouvera une variante de mise en œuvre sur…	http://www.uvp5.univ-paris5.fr/TFM/parcours/AffFA.asp?CleFA=FA02
On trouvera deux clips vidéos correspondant sur…	http://www.uvp5.univ-paris5.fr/TFM/parcours/AffVideo.asp?Clip=S36 http://www.uvp5.univ-paris5.fr/TFM/parcours/AffVideo.asp?Clip=S37

Ce jeu n'est intéressant, en tant que support d'apprentissage, que si on va jusqu'aux nombres 10 à 12. Avec une suite numérique plus courte, ce n'est pas la peine de le proposer.
Ce n'est pas un jeu de lecture. L'écriture du nombre dans les cases n'est réellement utile que pour permettre à l'enseignant d'évaluer rapidement le déroulement de la partie, surtout quand, en C2, divers groupes d'élèves utilisent des plateaux portant sur des segments numériques différents. (Dans ces jeux, comme dans l'apprentissage de comptines numériques, la mémorisation des noms des nombres est une mémorisation sans signification, du type « *am, stram, gram* »)

Pour les CP, la comptine doit aussi être récitée de 10 en 10, pour mémoriser les noms des dizaines.
Pour des CP/CE1, on peut :
- commencer ce jeu à un autre nombre que « 1 » (par exemple de 15 à 28, de 57 à 72, …)
- numéroter les cases de « 10 » en « 10 »…

C – Dénombrement

Dénombrer, c'est répondre à la question « combien ». Selon la taille de la collection à dénombrer, deux procédures sont possibles :

- **par subitisation**, c'est-à-dire par reconnaissance perceptive globale immédiate quelle que soit l'organisation spatiale. Cette procédure n'est possible que pour de très petites collections (deux, trois, voire pour certains sujets quatre éléments) mais cela ne s'étend pas lorsque les collections sont importantes. Cette procédure est vraisemblablement similaire aux « compétences numériques » des animaux (cf. S. DEHAENE).
- **par comptage**, c'est-à-dire en utilisant la comptine numérique dans une activité dont il ne faut pas sous-estimer la complexité –principes de GELMAN– (l'enseignant doit être attentif à la phase où l'élève connaît si bien la comptine numérique qu'il continue à la réciter alors qu'il n'y a plus d'objets à compter).
Pour être à l'aise avec le dénombrement par comptage, l'élève doit à la fois avoir mémorisé la suite des noms de nombres « loin » (en gros, deux fois plus loin que ce qui est nécessaire pour indiquer le nombre d'éléments de la collection), et être capable de s'arrêter à volonté au cours de la récitation : d'où l'intérêt des comptines-jeux à défilement aléatoire (« *un petit cochon pendu au plafond* » ou sa variante – moins suspecte d'un point de vue biologique- « *combien faut-il de pommes de terre pour faire la soupe de ma grand'mère* »).

A terme, le dénombrement se manifeste exclusivement par l'indication d'un nom de nombre accompagné de la mention de la grandeur concernée (dix cartes, quinze pommes) : un élève qui répond ainsi doit être félicité, valorisé ; il ne faut surtout pas lui demander de régresser à une procédure plus primitive de pointage-récitation de la comptine (sauf dans le cas où la réponse est erronée ou mise en question par un de ses camarades).
En début ou en cours d'apprentissage, le pointage manuel des éléments à compter, en synchronisation avec la récitation de la suite des noms de nombres, est indispensable ; au tout début, il peut (voire doit) s'accompagner du déplacement des objets à compter, pour rendre sensible la progression dans le dénombrement, et visualiser d'une part les éléments déjà pris en compte et d'autre part ceux qui n'ont pas encore été utilisés.
L'invariance du résultat du comptage quel que soit l'ordre de pointage des éléments (quelle que soit la transformation du « tas » en « file ») peut être travaillée lors des activités rituelles de comptage des présents : après avoir compté dans un certain ordre, faire procéder à un nouveau comptage dans un autre ordre. Toujours lors des rituels de comptage des présents, on peut dissocier la récitation du pointage, en confiant chacune de ces deux tâches à deux élèves différents, pour mettre en évidence

leur nécessaire synchronisation.
Le pointage manuel sans déplacement des objets (qui suppose une transformation « mentale » de la collection-tas en collection-file) puis le pointage visuel sans contact physique de la main/du doigt avec les éléments de la collection constituent deux étapes importantes vers la procédure « experte ».

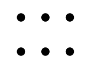
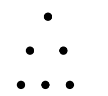
D – Représentations

Lorsque ces compétences (comparaison, mémorisation, dénombrement) sont déjà bien installées, et si les activités proposées le légitiment, on peut passer à l'utilisation de représentations :

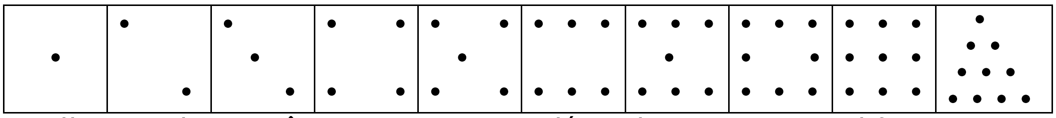
Représentations analogiques : les doigts, les constellations, …

Représentation symbolique : les écritures chiffrées

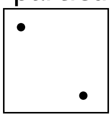
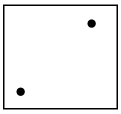
Quoi de plus naturel que de chercher à donner du sens aux constellations quand on dispose d'un dé (éventuellement dont les faces opposées portent la même valeur, pour réduire le domaine numérique travaillé) et qu'on veut s'en servir pour déterminer aléatoirement le nombre d'objets à ramasser ou le nombre de cases dont il faut avancer, cela aidant ceci !
La reconnaissance des constellations prend appui sur la disposition spatiale des éléments de la collection.

La plupart des adultes de notre entourage reconnaissent instantanément « six » dans	
… mais pas de manière immédiate dans	

Ces collections organisées permettent une désignation facile de quantités plus importantes (par exemple jusqu'à dix) :



Remarquons que ces constellations doivent être reconnues en dépit de certaines modifications, en particulier les isométries usuelles (par exemple rotation d'un quart de tour), ainsi :

 et  désignent la même valeur, deux.

Comme pour le dénombrement, ce qui est visé est la reconnaissance globale de la quantité pour une « petite collection » (cf. programmes 2002-2007) : il est néfaste de faire régresser l'élève vers une procédure de pointage-récitation s'il est capable d'indiquer correctement la valeur « au premier coup d'œil » (cette reconnaissance devient un automatisme, voir ci-après).

De même, les doigts constituent des collections de référence bien pratiques dans des activités à distance puisque, même lorsque la consigne interdit d'emporter les nounours pour leur préparer la table du goûter, les doigts vous suivent toujours dans vos déplacements.
Le choix de la collection de doigts représentant une valeur donnée est culturel (le poing fermé qui chez nous désigne 0 désigne 5 pour d'autres), cette convention –lit-on les doigts levés ou les doigts repliés ?– intéresse moins l'enseignant que la possibilité qu'a alors l'élève de communiquer de manière non-verbale à propos de quantités.
Ce que montre l'enseignant, pour une valeur autre que « un », doit clairement être un ensemble de plusieurs doigts (si l'on « n'éteint » pas la configuration « pouce » en passant du son « un » au son « deux », bien des élèves pensent que c'est l'index qui désigne « deux », et non la paire « pouce, index »). A contrario, un élève qui montre « deux » à l'aide de l'index et de l'auriculaire fournit à l'enseignant une indication précieuse de référence à une quantité, alors que celui qui se borne à reproduire le geste « pouce, index » peut n'avoir pas pris en compte l'aspect quantité, essentiel dans les représentations analogiques, mais seulement des éléments spatiaux.
Quand on a implicitement représenté, pour les premières collections, la valeur *n* comme étant « un de plus que *n – 1* », il est illogique de changer : la configuration « quatre » qui suit « pouce » (un), « pouce/index » (deux), « pouce/index/majeur » (trois), est « pouce/index/majeur/annulaire », et non « index/majeur/annulaire/auriculaire » qui présente 4 non comme 3 + 1, à l'inverse des étapes

précédentes, mais comme 3 + 2 – 1 (c'et un choix possible, de la part de l'enseignant, à condition qu'il soit conscient de cet implicite et assume la rupture qu'il impose ainsi à ses élèves). L'argument d'acrobatie gestuelle pour la configuration « pouce/index/majeur/annulaire » est un faux prétexte :

- primo, quand on en est seulement à « quatre », on dispose de la deuxième main pour tenir en place l'auriculaire qui aurait du mal à rester replié sur la paume ;
- secundo, il y a là un jeu de doigts excellent pour la musculature de la paume de la main indispensable pour la calligraphie.

Des ruptures dans la logique de représentation s'observent également au passage de cinq à six dans certaines frises numériques où les configurations digitales sont utilisées.

Dans cet exemple, on cumule la rupture 3/4 et celle à 5/6 (cinq : main gauche pleine, six : main droite pleine et un sur main gauche). L'enseignant a-t-il adopté ces choix de manière délibérée, en y trouvant un avantage ? [il y en a, mais peut-être pas pour l'année de G.S. maternelle.]

Une fois que les élèves ont compris l'intérêt d'une représentation, on peut aborder d'autres représentations analogiques d'intérêt didactique, comme les configurations Herbinière-Lebert (qui ont un intérêt encore plus important en C.P.-C.E.1), et la représentation symbolique par les écritures chiffrées.

Trois compétences distinctes concernant les écritures chiffrées sont à développer :

- savoir lire (donc reconnaître l'information ainsi codée),
- savoir coder (en utilisant des étiquettes nombres toutes prêtes, fournies dans le désordre),
- savoir calligraphier, apprentissage qu'il n'y a aucun avantage à entreprendre trop tôt. Dans l'idéal, il faudrait attendre que les élèves connaissent les quantités jusqu'à neuf, pour que l'écriture se fasse sur des valeurs qui ont du sens. En tout cas, ce travail *ne doit être conduit que sous forme d'atelier dirigé*, la présence de l'enseignant étant indispensable pour assurer que les tracés sont réalisés avec la dynamique nécessaire. Écrire des chiffres ne se fait pas n'importe comment, et l'apprentissage s'effectue par famille de gestes, non par ordre croissant de valeur. Sauf tentatives « sauvages » des élèves auparavant, c'est en section des Grands que cet apprentissage est généralement le mieux placé ; en effet, il requiert à la fois un développement de circuits neuronaux et une musculation de la paume de la main qui ne semble pas plus précoce en 2009 qu'il y a cinquante ans ou plus. Un élève de Petite Section qui tient crayon ou stylo entre la paume et les phalanges comme il agripperait une corde à grimper n'a vraisemblablement pas non plus la mobilité nécessaire des articulations des doigts, du poignet, du coude et de l'épaule indispensables pour une activité de calligraphie : indiquer la quantité d'éléments d'une collection à l'aide d'une pince à linge à choisir parmi un lot de pinces à linge sur lesquelles ont été marquées les écritures chiffrées lui sera beaucoup plus profitable que de gribouiller un tortillon n'ayant qu'une vague ressemblance avec le tracé attendu.

De même que la file

α	β	γ	δ	ε	ζ	η	θ	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ρ	σ

ne suffit pas à un non-helléniste pour dire le nom de la sixième lettre de l'alphabet grec ou à quoi ressemble la lettre « ksi », de même une bande numérique chiffrée n'est d'aucune aide, pour un élève qui n'a pas mémorisé le nom des nombres de la suite des entiers naturels, pour savoir comment s'écrit en chiffres le nombre « treize » ni pour trouver comment s'appelle le nombre écrit « 15 ».

Ces quatre apprentissages-clefs ne sont pas gratuits, ils sont mis en place en vue de résoudre des problèmes, par des procédures non-numériques ou numériques…

…. ce qui permet à l'élève, au cours des premières années de la scolarité (maternelle puis élémentaire) de passer de la lecture sur les objets (manipulation et constat) à l'anticipation (travail à distance ou « sans voir »)

Ce sont des apprentissages qui nécessitent d'être repris dans la durée.

APPRENTISSAGES CLEFS DANS LE DOMAINE NUMERIQUE AU CYCLE 2

La résolution de problèmes est transversale aux apprentissages mathématiques dans les classes élémentaires : elle en constitue à la fois le point de départ et le point d'arrivée.

Compétences à développer	G.S.	C.P.	C.E.1
Résoudre des problèmes par -procédure personnelle -procédure éprouvée			
Etablir et mémoriser des faits numériques élémentaires			
Développer et enrichir des stratégies de calcul réfléchi			
Acquérir une technique algorithmique de calcul			

Mais il n'en sera que peu question (explicitement, du moins) dans ce qui suit…
Elle permet de :

-développer le goût du raisonnement

-construire le sens des opérations (dans le cas des problèmes numériques)

L'accès au sens et l'acquisition des automatismes ne sont pas antinomiques. (cf. programme 2008)

A – Parenthèse sur les automatismes

Pour cerner ce que désigne le terme « automatisme », prenons un exemple en maternelle : le dé à faces de couleurs (fin PS/début MS)
Savoir que la « bonne » couleur est celle de la face supérieure du dé n'est nullement le résultat d'une convention (comme « en France, les véhicules roulent sur la partie droite de la chaussée », convention qui est différente lorsqu'on franchit la Manche), mais constitue l'une des premières approches de raisonnement que l'on peu présenter à un jeune enfant ; ce serait dommage de l'obtenir uniquement par « dressage ». Cette connaissance fait intervenir la notion de point de vue : où que l'on soit situé, c'est cette face que tout le monde voit de manière identique ; les autres faces ont des couleurs différentes pour chacun des joueurs.
Après avoir fait constater ce phénomène et installé la lecture de dé comme choix cohérent pour tous les joueurs (ce qui peut nécessiter plusieurs répétitions de la situation d'apprentissage, avec les élèves assis autour d'une table sur le plateau de laquelle est placé un dé géant), on constate que les élèves n'ont plus besoin de re-parcourir le raisonnement, mais se réfèrent spontanément à la face adéquate. Si on leur demande un peu plus tard pourquoi c'est telle indication qu'ils prennent en compte, ils montrent la face concernée (voire, parfois, ils formulent « c'est la face en haut du dé qui dit »), sans plus sembler conscients du raisonnement qui a été mis en place. La lecture du dé est devenue un automatisme.

Les automatismes :

- sont des techniques et raisonnements élémentaires disponibles sans délai, exécutables en « tâche de fond » pour libérer l'attention dans des tâches plus complexes
- résultent d'un apprentissage explicite, conduit par l'enseignant, dans la régularité, la durée, la diversité (contextes, mise en œuvre)

Il est indispensable de garder présent à l'esprit que « l'accès au sens et l'acquisition des automatismes ne sont pas antinomiques » (le programme de 2008 est explicite à ce sujet, B. O. p. 11).

Les automatismes en mathématiques ne concernent pas que des aspects numériques (l'exemple du dé est un automatisme de la vie courante, mais en géométrie le tracé à main levée des figures usuelles est un automatisme censé être acquis à l'issue du cycle 3). Ils ne sont jamais mis en place comme « règle » (risque de perte de sens), mais résultent d'une intériorisation personnelle de raisonnements simples devenus « évidents » -et implicites- à la suite d'une fréquentation régulière, répétée.
Les automatismes doivent être entretenus : l'apprentissage mis en place par l'enseignant doit être

répété différemment pour chaque élève (certains élèves automatisent très rapidement parce qu'ils ont compris très rapidement, d'autres ont besoin d'un plus grand nombre de répétitions), dans des contextes variés, sur des situations diverses et doit être utilisé régulièrement.

B - Représentations (mentales) des nombres, en particulier parmi d'autres nombres

On ne peut entreprendre aucun apprentissage efficace sur le domaine numérique sans représentation mentale des nombres. Cela consiste à :
-donner du sens aux nombres, à partir de quantités ;
-situer un nombre, par divers moyens ; en particulier lier un nombre à son successeur, son prédécesseur et progressivement, pouvoir encadrer un nombre entre deux dizaines consécutives.

Des exemples d'outils:

- Damiers
  - o avec écriture chiffrée (dès M.S.)
  - o ou écriture en lettres (CP/CE1)
  - o à laisser en entier dès la MS (n'en utiliser qu'une partie ne permet pas aux élèves de vérifier les « constantes »)
  - o à la différence du jeu du « Lynx » qui n'a pas d'organisation thématique des pièces, il est plus facile de se repérer sur ce damier qui a une structure en colonnes (celle des 4…), en lignes (celle des 2, des 4 aussi…)
  - o de 0 à 99 plutôt que de 1 à 100 sinon on n'a pas d'homogénéité au sein d'une même « famille » sur chaque ligne

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Jeu de loto (chaque valeur est disponible sur étiquette mobile, tirée au hasard).

- Bandes numériques
  - o Avec tous les nombres
  - o Avec quelques nombres cachés. Les élèves « voient sans voir » (le nombre est présent dans leur tête alors que rien ne le matérialise).
    En cachant le nombre, on peut aider à voir ses liens avec les nombres voisins.

La bande numérique peut ne comprendre que les dizaines (multiples pairs de 5) et les demi-dizaines (multiples impairs de 5).
Le damier de 0 à 99 est plus intéressant pour une vue d'ensemble de la première centaine ; il peut être complété en C.E.1 (voire fin C.P.) par un damier 100-199. L'intérêt principal du damier 1-100 est de constituer un bon outil de référence pour les « passages à la dizaine » (trouver le successeur de 39, 69, … quand ce n'est pas encore automatisé). Vu dans une classe un intéressant « damier mixte à "oreilles" », où la bande 10-20-30-… 70-80-90 est mobile, et peut donc se placer soit comme dans le damier 0-99, soit comme dans le damier 1-100.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		10
10		11	12	13	14	15	16	17	18	19		20
20		21	22	23	24	25	26	27	28	29		30
30		31	32	33	34	35	36	37	38	39		40
40		41	42	43	44	45	46	47	48	49		50
50		51	52	53	54	55	56	57	58	59		60
60		61	62	63	64	65	66	67	68	69		70
70		71	72	73	74	75	76	77	78	79		80
80		81	82	83	84	85	86	87	88	89		90
90		91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	

Outre son utilisation pour des activités de type « loto » ou de déplacement sur une piste à cases numérotées, le damier peut servir de support à des dictées de nombres (on cache le nombre dicté, qui peut être fourni par son nom, par une description, par une décomposition, par dictée muette à partir d'une bande numérique –complète ou incomplète-, …), d'aide à diverses activités de calcul mental (dont le jeu du « nombre pensé »).

Autres activités:

- Compter (de 1 en 1, de 2 en 2, … de 10 en 10 à partir du C.P. –quel que soit le nombre de départ–, de 5 en 5…) dans le sens croissant ou dans le sens décroissant

Attention : on s'aperçoit que, dans les fichiers et manuels, parmi tous les exercices proposés, il y en a bien plus qui portent sur l'ordre croissant que sur l'ordre décroissant : or on constate que les élèves ont plus de difficultés avec l'ordre décroissant.

- « Fil » numérique (topologique)

Pour les CP/CE1 :

- dans la boîte à étiquettes/nombres, on sort l'étiquette « 43 » ; on l'installe sur le fil
- dans la boîte à étiquettes/nombres, on sort l'étiquette « 29 » ; on l'installe plus loin (à droite) sur le fil
- dans la boîte à étiquettes/nombres, on sort l'étiquette « 59 » ; où la met-on ?

43 29

On s'intéresse plutôt à savoir s'il est « à gauche » de 43, « entre » 43 et 29, « à droite » de 29 (et pourquoi ?), que de chercher à le positionner de manière précise (en particulier, on ne s'intéresse pas à la « distance » qui le sépare de ces deux nombres sur le fil). Si nécessaire, on « pousse » les étiquettes pour dégager la place nécessaire.

C - Groupements/échanges

L'activité essentielle prend appui sur une activité de type « jeu du banquier ».
Pour que celle-ci soit formatrice, elle doit constituer autre chose qu'un passe-temps (donc être travaillée dans la durée, et pas juste pendant une partie d'une unique séance) et conduire les élèves à se poser des questions, en particulier « qui a eu le plus pendant ce tour ? ».
Ce qui est visé est le principe de la numération de position. Un groupement (quel que soit son rang) peut être utilisé comme unité (du rang immédiatement supérieur).
Certains élèves conçoivent très rapidement (dès les premières activités de numération en C.P.) la généralité du principe, la récursivité du groupement (une dizaine de dizaines, c'est une centaine, une dizaine de centaines c'est un millier qui est aussi une centaine de dizaines, …), d'autres –les plus nombreux– ont besoin de plusieurs années pour acquérir une telle vue d'ensemble.

Récapitulatif sur le jeu du banquier	http://www.uvp5.univ-paris5.fr/TFM/parcours/AffFA.asp?CleFA=FA13
Détails sur chaque étape	http://www.uvp5.univ-paris5.fr/TFM/parcours/AffFA.asp?CleFA=FA10 http://www.uvp5.univ-paris5.fr/TFM/parcours/AffFA.asp?CleFA=FA11 http://www.uvp5.univ-paris5.fr/TFM/parcours/AffFA.asp?CleFA=FA12
Clips vidéos associées	http://www.uvp5.univ-paris5.fr/TFM/parcours/AffVideo.asp?Clip=S08 http://www.uvp5.univ-paris5.fr/TFM/parcours/AffVideo.asp?Clip=S10 http://www.uvp5.univ-paris5.fr/TFM/parcours/AffVideo.asp?Clip=B16 http://www.uvp5.univ-paris5.fr/TFM/parcours/AffVideo.asp?Clip=B18 http://www.uvp5.univ-paris5.fr/TFM/parcours/AffVideo.asp?Clip=B19 http://www.uvp5.univ-paris5.fr/TFM/parcours/AffVideo.asp?Clip=B20 http://www.uvp5.univ-paris5.fr/TFM/parcours/AffVideo.asp?Clip=B22

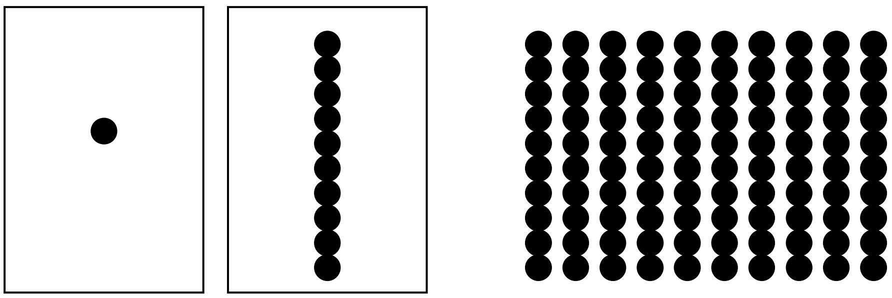
Privilégier les groupements par 10 dès que possible. Il n'est besoin de travailler les groupements par 3 ou par 5 que pour aborder des activités de ce type, dans le cas d'élèves pour qui 10 est inconnu ou trop peu familier…, ou pour aborder des groupements de groupements avec des valeurs inférieures à cent.
Ne pas utiliser d'écriture chiffrée avec des groupements autres que 10 (sinon : faut-il coder en base dix alors qu'on groupe autrement ? faut-il coder en base autre que dix, ce qui n'a jamais été inscrit dans les programmes de l'école élémentaire… mais s'est beaucoup pratiqué dans les années 70).

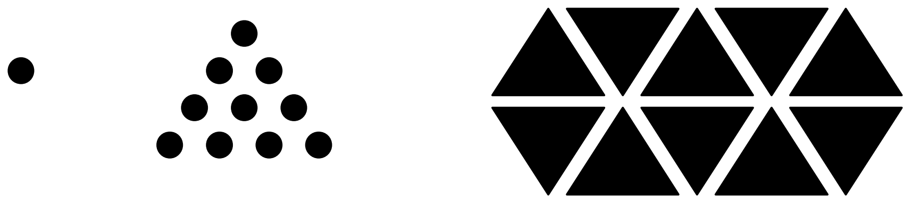
Il est souhaitable d'avoir plusieurs matériels à disposition pour aider les élèves qui ont des difficultés (cela permet d'observer l'établissement éventuel de liens entre des situations perceptivement différentes, ou de fournir de nouveaux supports pour des activités déjà entreprises, mais que l'on

peut ainsi reprendre dans un contexte différent).
Aucun matériel ne dispense l'élève d'un travail personnel, pour comprendre le système de numération de position ; en C.P.-C.E.1, on vise une compréhension en actes, c'est-à-dire qui permet d'utiliser efficacement cette numération.
C'est en cycle 3 qu'on vise une compréhension conceptuelle du fonctionnement de ce système de numération (souvent par confrontation à d'autres systèmes de numération).
Les matériels suivants permettent de mettre en évidence différents aspects de la numération : leur utilisation est pertinente avec des élèves de classes élémentaires (C.P., C.E.1 et au-delà), mais de peu d'intérêt en général en maternelle. Ils peuvent accompagner les différentes étapes de l'activité « jeu du banquier », et en renouveler l'intérêt grâce à un changement de certains éléments.

Du matériel analogique
Dans les deux premiers cas, le contrôle de la dizaine (le fait qu'une dizaine est constituée de dix unités) est assuré par le matériel, dans les deux derniers, il est à la charge de l'utilisateur.
- cubes, barres, plaques
- cartes à points (dizaine sous forme « rangée » ou sous forme « triangle »)

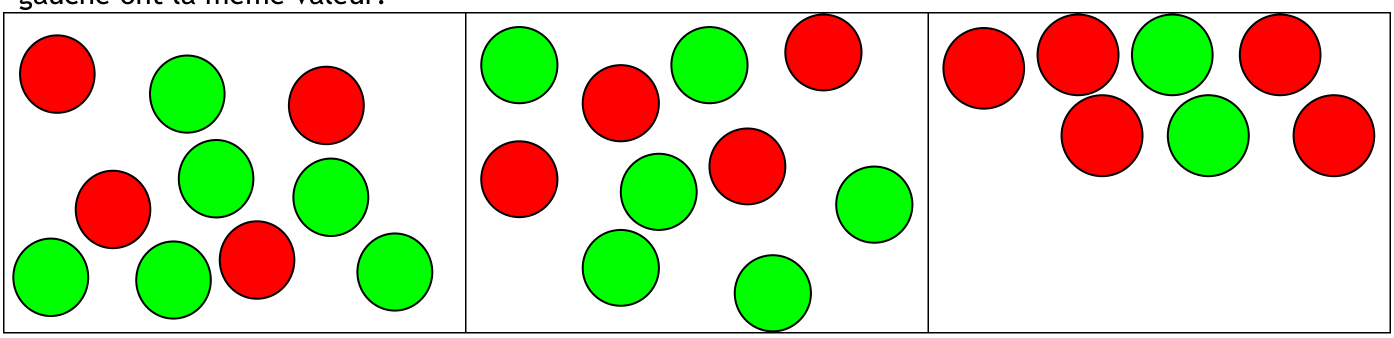
Ces cartes nécessitent une organisation spatiale, indispensable car une collection de dix objets ne relève pas de la subitisation mais de la reconnaissance de constellations.





- bûchettes et fagots, …
- cailloux et godets à petits suisses
- …

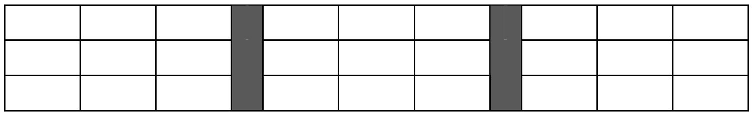
Du matériel semi-analogique
Ici, ce n'est pas le nombre de jetons qui indique l'élève qui a « gagné » mais leur valeur.
Par exemple, si les « verts » valent « 1 » et les rouges valent « 10 », c'est la 3ème case qui a le plus de valeur alors qu'elle a le moins de jetons. La place des jetons n'a pas d'importance (les deux cases de gauche ont la même valeur.



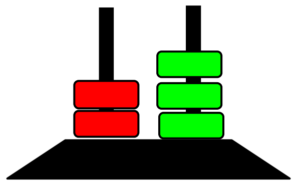
Eviter l'emploi d'écriture chiffrée avec des matériels non positionnels tels que :
- analogique
- semi-analogique

Du matériel semi-symbolique

- abaque à zones (ci-contre un abaque à trois zones quadrillée, utilisable pour les nombres jusqu'à 999)



- socle à tiges (utilisable pour les nombres de 0 à 99).



Ici, ce qui indique la valeur de chaque jeton c'est sa position sur le support.
Il vaut mieux utiliser des éléments mobiles tous identiques, pour forcer l'attention sur la position.
Les élèves doivent être côte à côte et non face à face s'ils utilisent du matériel semi-symbolique (positionnel)

D - Changement d'unité (multiplier ou diviser par dix, cent, mille)

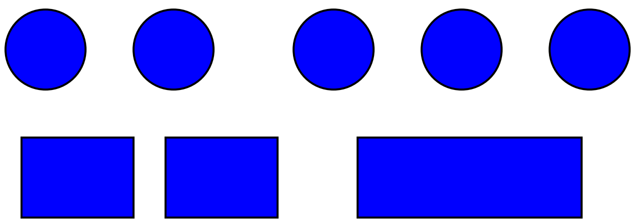
Multiplier par dix, c'est transformer des unités en dizaines (donc des dizaines en centaines…) ; multiplier par cent, c'est transformer des unités en centaines (donc des dizaines en milliers…). Vingt-cinq dizaines, c'est deux « dizaines de dizaines », donc deux centaines et encore cinq dizaines (ou cinquante unités) : par conséquent, vingt-cinq dizaines c'est deux cent cinquante unités.

Il est indispensable de raisonner : cela fournit un appui mutuel entre numération et détermination d'un décuple, d'un centuple... En fin de cycle 2, ces démarches doivent être acquises et automatisées ; elles seront facilement alors transférées dans le cas des grandeurs et réinterprétées au cycle 3 (combien de dixièmes représentent cinq unités est exactement du même type que combien d'unités représentent cinq dizaines).
Il faut porter attention au « nombre de … », au « chiffre des… ». L'élève de C.E.2 doit être aussi capable de déterminer combien de dizaines dans 254 que de répondre à la question « quel est le chiffre des dizaines de 254 » : or si cette dernière question est généralement bien réussie, la première l'est beaucoup plus rarement, même en sixième.

Eviter absolument les règles se référant à une écriture, qui conduisent, surtout pour les élèves les moins assurés, à une catastrophe à plus ou moins brève échéance (même si parfois, cela permet de se frayer un chemin assez loin) et dont l'apport extérieur constitue un important obstacle à la compréhension. Seul un élève qui a bien compris la numération –c'est-à-dire un très petit nombre d'enfants– ne sera guère gêné par une telle règle, tout au plus sera-t-il incité à une paresse intellectuelle qu'il aurait peut-être évitée en étant sollicité sur de tels raisonnements.
De plus, les formulations courantes de cette « règle des zéros » sont toujours incorrectes et sources de confusions très gênantes, soit par rapport à l'addition si on emploie le terme « ajouter », soit sur le concept même de nombre, d'écritures d'un nombre, si l'on utilise la formulation « écrire à droite du nombre ».

Autres matériels d'aide pour la numération :

- Jetons de « Nain jaune »



- Monnaie factice

De tels matériels, et les échanges entre leurs éléments, facilitent la compréhension par les élèves de ce qui se passe quand on multiplie par dix, en revenant à une décomposition en unités, dizaines, … du nombre que l'on doit multiplier par dix.

La monnaie (factice et permettant donc de manipuler si nécessaire, ou simplement évoquée si les élèves le peuvent –plutôt en cycle 3–) est une source importante de petits problèmes concrets de calcul mental, pour lesquels un raisonnement est longtemps indispensable : « *je porte sur mon compte en banque vingt-trois billets de dix euro : de combien mon compte est-il crédité ?* » Il est souhaitable de faire reformuler à la plupart des élèves pendant de nombreux mois le raisonnement qui consiste à considérer ces vingt-trois billets comme deux liasses de dix billets (qu'on pourra échanger chacune contre un billet de cent euros) et trois billets isolés, retrouvant ainsi les 230 euros de crédit. De tels petits exercices (oraux à l'époque) étaient abondamment proposés dans les manuels en usage dans la première moitié du vingtième siècle.

E - Dénomination des nombres

Pour « 23 », il vaut mieux savoir dire « 2 paquets de dix et 3 qui n'entrent pas dans un paquet », plutôt que de savoir dire « vingt-trois » : en effet, la première formulation permet de progresser dans les apprentissages (par exemple les opérations) bien plus que la deuxième. Donc une « épellation » des nombres jusqu'à mi-C.E.1 n'a rien de choquant, sous réserve que :
-l'épellation suive bien, pour les nombres, la formulation adoptée pour les mots : de même que « chat » s'épelle « C-H-A-T » et non « C et H et A et T » ni « un C et un H et … », de même 76 peut, si l'élève ne connaît pas le nom officiel de ce nombre, être désigné sans ambiguïté par « sept-six», mais ne correspond ni à « six-sept » ni à « sept et six» (qui font treize) ni à « un sept et un trois » (épeler n'est pas procéder à la description d'un paysage comportant une falaise et une éolienne et …)
-lorsque le nom officiel d'un nombre est ignoré par un élève, quelqu'un dans la classe –élève ou enseignant– le fournisse sans délai.
En revanche, des tentatives déjà anciennes (instructions de 1945) ont été faites d'employer des dénominations « rationnelles « telles que « dix-un », « deux dix-un », « deux dix-deux », « deux-dix-trois », sans que l'on ait pu constater une amélioration sensible de la compréhension et des performances autre que très locale (quelques classes, probable « effet maître »). Une telle pratique s'oppose à l'usage de la langue française, contrairement où « two tens and four » est bien compris comme « vingt-quatre ». En effet, dans cette langue, l'adjectif numéral invariable « ten » (dix) est aussi le nom (susceptible de s'accorder en nombre) « a ten » pluriel « tens » qui signifie « dizaine ». « two tens and four » n'est donc pas interprété comme « deux, dix et quatre » (compris comme « eize »), mais comme « deux dizaines et quatre », tournure moins usitée mais sans ambiguïté.

Quelques écueils à éviter :

- Eviter les contre-apprentissages ou assumer les ruptures *(en cycle 3, il y aura les décimaux… et pas de déluge avant!)*
  Cas de la « règle du zéro » (qui brouille le sens de concepts fondamentaux)
  - « ajouter un zéro » 17 + 0 = … 17 ou 170?
  - « ajouter … à droite » 17 + 0 = 0 + 17 non?
  - « ajouter deux zéros » 17 + 0 + 0 ???
  - « écrire à droite » (3 + 6) x 10 = 3 + 60?
- Eviter les règles qui ne marchent que rarement
  - "dans trente-quatre, j'entends « tr » comme trois".

  C'est vrai, …
  - "et dans vingt-quatre, tu entends « v » comme …?"

Notre numération orale comporte trois dizaines (voire quatre) pour lesquelles « entendre » peut être utile, contre cinq dizaines où « entendre » au mieux n'apporte rien, au pire … apporte des ennuis !

ENTRAINEMENT AU CALCUL MENTAL

Calculer mentalement est un apprentissage qui doit être dirigé par l'enseignant, en classe, et qui vise une double compétence :

- trouver quasi-instantanément –en trois à cinq <u>secondes</u>–, sans reconstitution consciente et volontaire d'un raisonnement, le résultat d'une opération simple donnée portant sur des nombres simples (donc sans repasser par la récitation de tout le « chapelet » pour trouver 7 et 8). L'opération simple est fréquemment l'addition ou la multiplication (l'exercice revient à ce qu'on désignait par « connaissance des tables »), mais peut aussi être une « opération à trou », telle que « que faut-il ajouter à six pour obtenir neuf ? » ou « en quarante combien de fois cinq ? », ou un « complément à … »

	Pour donner le résultat de 7 + 8, il existe deux stratégies ↙ ↘	
Le « magasinier » L'élève qui va chercher la réponse dans une « case » de sa mémoire	**Un travail individuel quotidien de l'élève est nécessaire …**	Le « constructeur » L'élève qui reconstruit rapidement un raisonnement de manière non consciente

… mais ne réclame pas que l'enseignant devienne un précepteur personnel pour chaque élève !

- décomposer un nombre selon une opération simple donnée, en un temps retreint –en moins de dix <u>secondes</u>– (donner trois décompositions multiplicatives différentes de 24). Ce type d'exercice est moins fréquemment pratiqué, mais se révèle de fait souvent le plus utile.

Cet apprentissage ne vise pas à former des champions de concours de calcul, mais :

- à court terme, à éviter des obstacles importants pour l'apprentissage puis l'utilisation du calcul algorithmisé (les techniques posées) ;
- à moyen terme, à faciliter le calcul numérique (calcul sur les fractions, calcul de la valeur d'une fonction pour une valeur donnée de la variable) ou algébrique (factorisation) en collège ;
- à plus long terme, à permettre à l'adulte d'effectuer mentalement et aisément des calculs qui lui assurent une autonomie d'action ou de pensée dans la vie quotidienne.

Si l'on veut que l'élève puisse parvenir à un minimum d'aisance en ce domaine qui en conditionne d'autres, il ne faut pas sous-estimer l'importance du travail à mettre en place, entre autres le coût en temps. Le quart d'heure quotidien de calcul mental est prévu pour apporter aux élèves :

- des connaissances sur les faits numériques élémentaires (élaboration et mémorisation de ces résultats, cette mémorisation prenant rarement –mais pas "jamais", voir bibliographie– appui sur des rythmes, des rimes et des évocations, contrairement à la mémorisation de poèmes)
- des stratégies de calcul différentes de celles qu'on emploie en « calcul posé ». En effet, le calcul mental a ses procédures propres, et ne se réduit pas à du « calcul écrit non écrit ». En revanche, il n'est pas indispensable de vouloir toujours le pratiquer sans recourir à aucun support visuel ni tactile ; au moins pendant la phase d'apprentissage, prendre appui sur des éléments matériels peut s'avérer très profitable.

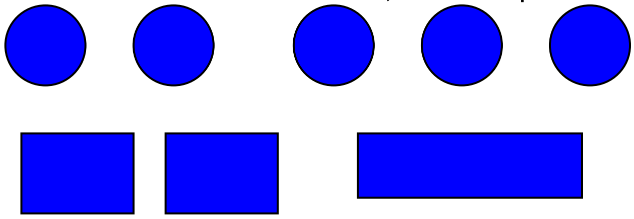
L'enseignant doit pouvoir proposer à sa classe des exercices variés (tant dans le contenu que dans la mise en œuvre), et disposer de procédures de calcul diverses de manière à s'adapter aux différents profils pédagogiques des élèves d'une classe donnée.
Il peut articuler cet apprentissage en trois temps:

- Se représenter mentalement les nombres
- Etablir et mémoriser les faits numériques élémentaires
- Enrichir les stratégies de calcul réfléchi

Se représenter mentalement les nombres résulte en grande partie du travail sur la numération dont nous venons de présenter les éléments les plus marquants, et peut être entrepris dès la fin de la maternelle.

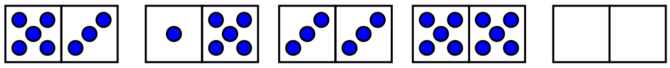
<u>Exemples de supports pour favoriser des représentations mentales</u>
Configurations digitales (dit plus simplement : collections de doigts) et autres supports privilégiant le pivot à 5
Remarque : le « 5 » est un pivot, comme dans la numération romaine ; ce n'est pas une base.

- Jetons de « Nain Jaune »



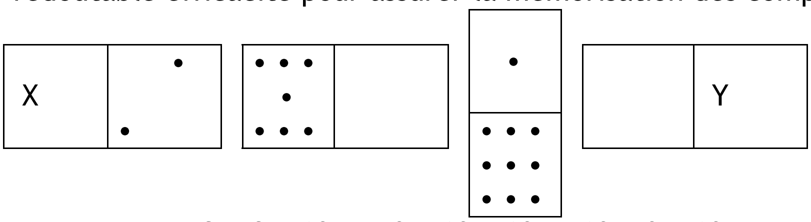
- Domino « double cinq »

(21 pièces, sans constellation « six »)



Divers matériels de numération (analogique, semi-analogique, semi-symbolique, mixte…)

<u>Exemples de supports pour mettre en place certains apprentissages spécifiques</u>
Pour les compléments à dix, le domino « double neuf » (utilisé avec la règle de jeu du Matador).
On trouve aisément (sur internet entre autres) la règle du Matador avec un domino usuel (double six) ; mais ce jeu offre un intérêt bien plus grand –quant aux apprentissages numériques– quand il est pratiqué avec un domino double-neuf. Pour mémoire, un domino « double neuf » (qu'on peut se procurer dans un bon magasin de jeux ou se fabriquer) comporte cinquante-cinq pièces, du double 0 au double 9 ; les constellations sont celles indiquées en page 5 de ce document. Une pièce dont la somme des points fait 10 (soit un point de plus que le maximum que l'on peut trouver sur un demi-domino), est appelée « matador » ; dans le cas d'un domino double-neuf, ces pièces sont au nombre de cinq ; on les place perpendiculairement aux autres pièces. La règle de placement des pièces n'est pas d'apparier des constellations identiques sur les demi-dominos contigus, mais de faire en sorte que la somme des points sur les deux demi-dominos contigus soit un point de plus que le maximum que l'on peut trouver sur un demi-domino. Autrement dit, quand on doit placer une pièce à côté d'un demi-domino vierge, on pose un matador transversalement (0 + 10 = 10) et on repart de l'autre côté avec un demi-domino égal à zéro (il est prudent de ne pas gaspiller ses matador, si l'on ne veut pas "coincer" le jeu). Donc dans le cas du domino double neuf, un matador est une pièce dont la somme des constellations vaut dix, et la règle de placement impose aussi que la somme des deux demi-dominos contigus soit dix également. Autant dire qu'à chaque instant, quand on joue au domino double-neuf avec cette règle, on pratique les compléments à dix. Avec des élèves de C.P. qui aiment jouer (ce qui n'est pas le cas de tous les élèves), quelques séances de matador s'avèrent d'une redoutable efficacité pour assurer la mémorisation des compléments à dix.



2 + 8 + 10   0 + 10 = 10   10 + 0 = 10 …

Pour la mémorisation des faits additifs ou multiplicatifs élémentaires, les tables recto-verso [empruntées à Math-hebdo] peuvent rendre service : 21 cartons par table (sur une face: le résultat, sur l'autre: l'écriture additive ou multiplicative). Les cartons sont posés côté écriture multiplicative visible, on joue à deux ; chaque enfant à son tour pointe une carte, l'autre doit dire le résultat ; si sa réponse est correcte –vérification par retournement–, il garde le carton. En fin de jeu, gagne celui qui a le plus de cartons ; bien d'autres jeux peuvent être utilisés.

A - Des activités à commencer dès la maternelle (M.S./G.S.)

<u>Les jeux de Lucky Luke</u> (l'homme qui sort ses doigts plus vite que son nombre…)
Donner le nombre correspondant aux doigts levés :

- en utilisant une seule main

- en utilisant les deux mains
- en variant les configurations des doigts levés
- en le faisant les mains dans le dos (donc sans voir les doigts)

Inversement, indiquer (verbalement, en utilisant des cartes-constellations, des cartes à écriture chiffrée, …) le nombre de doigts montrés très rapidement par l'enseignant (« doigts éclairs »)

<u>Les jeux de cailloux</u>

a) <u>Le jeu de « greli-grelo »</u>

L'enseignant :

- met 3 cailloux dans une main, 2 cailloux dans l'autre,
- fait dire ces nombres aux élèves,
- fait rejoindre ses deux mains et les agite en disant la formulette « greli-grelo, combien y en a-t-il dans mon sabot ? »

Ce jeu, qui a plus de cent ans, continue à constituer un excellent support pour aborder les problèmes d'addition. Toutefois, il faut laisser aux élèves le temps, parfois étonnamment long, de se rendre compte qu'il ne s'agit pas d'un jeu de hasard. Autocorrectif, il peut alors être pratiqué comme jeu d'apprentissage par les élèves en groupes de deux.

b) <u>Le jeu de « combien dans ma main… ? »</u> (variante du « jeu du gobelet »)

L'enseignant montre une collection de 8 cailloux dans ses deux mains et fait indiquer ce nombre aux élèves ; il referme ses deux mains l'une sur l'autre et partage cette collection en veillant à ce que les élèves ne voient pas comment s'effectue ce partage. Il montre alors le contenu de l'une des mains (5 cailloux) : « combien de cailloux dans l'autre main ? » Là aussi, l'enseignant peut être surpris par le temps mis par certains élèves avant de se rendre compte qu'il ne s'agit pas d'un jeu de hasard, où « gagner » relèverait de la chance !

B – Des activités en C.P

<u>Contenus</u>

Les sommes (à mémoriser)

- Les sommes de deux « petits » (un "petit nombre" est ici un nombre inférieur à 5)
- Les sommes d'un « petit » et un « grand » (en utilisant les doigts de ses mains et en « empruntant » visuellement les doigts des mains des voisins)
- Les sommes de deux « grands » (un "grand nombre" est ici un nombre compris entre 5 et 10)

Les compléments (à mémoriser)

- compléments à cinq et à dix
- compléments à 9

Les doubles et moitiés

- doubles de « petits nombres », moitiés de nombres pairs au plus égaux à dix (à mémoriser)
- double de nombres au plus égaux à cinquante, moitié de nombres pairs au plus égaux à cent (calcul réfléchi)

<u>Supports</u>

- comptines et jeux de doigts (« dix petits ballons avaient le ventre si rond »)
- calcul réfléchi par lecture sur les objets (par exemple avec les jetons de « Nain Jaune »)
- calcul réfléchi sans support matériel effectif (représentation mentale)

Remarque : un « tableau de progrès » où chaque élève note les résultats à mémoriser et colorie en vert ceux qu'il connaît et en rouge ceux sur lesquels il butte peut aider certains à se rendre compte, au cours de l'année, du chemin déjà parcouru et des efforts encore nécessaires.

0	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10

Tableau de progrès pour les sommes de deux « petits »

10	11	12	13	14	15
11	12	13	14	15	16
12	13	14	15	16	17
13	14	15	16	17	18
14	15	16	17	18	19
15	16	17	18	19	20

Tableau de progrès pour les sommes de deux « grands»

C – Des activités en CE1

<u>Contenus</u>
Faits additifs (révision du C.P.)
Faits multiplicatifs
- table de 2 (doubles)
- table de 5 (moitié du décuple: calcul réfléchi, avec ou sans lecture sur des objets)
- table de 4 (double du double)
- table de 3
- Et la table de 9, avec les doigts

Varier les supports:
- boulier 4x25 (Nathan, Bourrelier) en particulier pour la table de 5
- damiers de multiples

0		**2**		**4**		**6**		**8**	
10		**12**		**14**		**16**		**18**	
20		**22**		**24**		**26**		**28**	
30		**32**		**34**		**36**		**38**	
40		**42**		**44**		**46**		**48**	
50		**52**		**54**		**56**		**58**	
60		**62**		**64**		**66**		**68**	
70		**72**		**74**		**76**		**78**	
80		**82**		**84**		**86**		**88**	
90		**92**		**94**		**96**		**98**	

Damier des multiples de 2

0			**3**			**6**			**9**
		12			**15**			**18**	
	21			**24**			**27**		
30			**33**			**36**			**39**
		42			**45**			**48**	
	51			**54**			**57**		
60			**63**			**66**			**69**
		72			**75**			**78**	
	81			**84**			**87**		
90			**93**			**96**			**99**

Damier des multiples de 3

0					**5**				
10					**15**				
20					**25**				
30					**35**				
40					**45**				
50					**55**				
60					**65**				
70					**75**				
80					**85**				
90					**95**				

Damier des multiples de 5

0									**9**
								18	
							27		
						36			
					45				
				54					
			63						
		72							
	81								
90									**99**

Damier des multiples de 9

CALCUL REFLECHI

Comme son nom l'indique, le calcul réfléchi se caractérise par le fait que, même très entraîné, on commence toujours par réfléchir (ne serait-ce que trois secondes) avant de calculer. En effet, chaque calcul prend appui sur les propriétés des valeurs en jeu : il est donc l'occasion d'élaborer une procédure de calcul spécifique.
Le travail de l'enseignant consiste à aider chaque élève à développer un répertoire personnel de procédures (choisies parmi des procédures enseignées) : en effet ce qui convient, pour un calcul donné, à un élève d'une classe donnée n'est pas nécessairement le plus efficace pour tous ses condisciples, et ne sera peut-être pas le plus pertinent pour le même élève quelques années plus tard. On ne cherche donc jamais quelle est « la » procédure de calcul la meilleure : par exemple, pour un élève de CE1 peu à l'aise avec la soustraction, calculer 27 x 12 comme (30 – 3) x 12, quelle que soit son élégance, n'est certainement pas l'idée la plus pertinente. Effectuer un calcul réfléchi consiste toujours à remplacer un calcul rébarbatif par une suite de calculs sympathiques.

A - Principes du calcul mental et/ou réfléchi
Le plus souvent, en calcul mental et/ou réfléchi, on calcule sur les nombres (alors que, généralement, en « calcul posé » on calcule sur les nombres à un chiffre utilisés pour écrire en base dix chacune des nombres en jeu) et l'on traite en priorité les unités des ordres les plus élevés, ce qui fournit dès la première étape un ordre de grandeur du résultat.

Le fait de chercher à exploiter les propriétés des nombres qui interviennent dans le calcul fournit une occasion propice à un travail sur le sens, qu'il serait regrettable de perdre de vue en enseignant des procédures de calcul réfléchi comme des recettes.

Exemple au CE1	Pour calculer le triple de 32 trois fois trois dizaines: neuf dizaines trois fois deux unités: six unités d'où le résultat 96 *Eviter « on écrit 3x3 à gauche et 3x2 à droite »*	Pour calculer le triple de 35 trois fois trois dizaines: neuf dizaines trois fois cinq unités: quinze unités d'où le résultat (dix dizaines et cinq unités) 105 *Or « on écrit 3x3 à gauche et 3x5 à droite » donne 915*

Il est important d'insister sur le fait que le calcul « comme avec papier-crayon » n'est généralement ni le plus facile, ni le plus économique. Il faut donc éviter de demander aux élèves une réponse écrite « à la main », ce qui de plus, surtout en C.P.-C.E.1. où la calligraphie est généralement encore loin d'être automatisée, évite à l'enseignant des cas de conscience face à des réponses où c'est la calligraphie qui est fautive. L'utilisation d'étiquettes-chiffres ou de cartons Montessori est une solution si l'on souhaite éviter la réponse orale.
Sans que cela soit systématique, il est intéressant, pour certains calculs qui s'y prêtent particulièrement, de prendre le temps de faire expliciter plusieurs procédures efficaces.

B - Suggestions de contenus et de supports
Raisonnement à partir d'un damier de nombres ou de matériel de numération (y compris les jetons de Nain Jaune)

- ajouter un nombre d'un chiffre à un nombre de la première centaine (C.P.)
- ajouter un nombre entier de dizaines à un nombre de la première centaine (C.P.)
- calcul du double de nombres au plus égaux à cinquante (C.P.)
- calcul de la moitié de nombres pairs au plus égaux à cent (C.P.)
- ajouter un nombre à deux chiffres à un nombre de la première centaine (C.E.1)

Elaboration de stratégies dans certains cas particuliers (encourager les élèves à se passer de supports matériels)

- ajouter 9, ajouter 8 (C.P.), ajouter 11, ajouter 12, ajouter 19, 29, …
- soustraire 9, soustraire 8 (C.P.), soustraire 11, soustraire 12, soustraire 19, 29, …

Une attention particulière doit être portée aux calculs simples de numération : quel est le nombre comportant cinq dizaines et trois unités (C.P.), huit unités et six dizaines (C.P.), quinze dizaines et sept unités ? Quel nombre obtient-on avec quatre dizaines et douze unités (C.P.), avec seize unités et trois dizaines (C.P.), avec vingt dizaines et trente unités (C.E.1) ?

C - Activités de calcul mental et/ou réfléchi contextualisé

Il s'agit de conduire l'élève à établir des liens avec des situations concrètes et lui donner l'idée que le calcul mental et/ou réfléchi peut avoir une utilité pour résoudre les petits problèmes qui contribuent à automatiser le « sens des opérations » voire dans la vie extra-scolaire.

On peut pour cela avoir recours à des problèmes très simples portant sur des situations et objets de la vie courante ; le « jeu de l'autobus » en est un exemple. La situation-prétexte est un trajet d'autobus, au cours duquel des voyageurs montent et/ou descendent. Le jeu porte sur le calcul, à chaque départ d'un arrêt ou après un nombre donné d'arrêts, du nombre de passagers à bord de l'autobus. Le rendu de monnaie, la recherche de l'appoint à donner pour permettre un rendu plus simple, peuvent aussi être considérés comme des problèmes de vie pratique, que l'école doit d'autant plus faire pratiquer que nombre d'élèves n'ont plus d'occasion de s'y exercer en dehors de ce cadre. On retrouve dans de tels exercices un entrainement traditionnellement assuré par de nombreux exercices oraux (cf. BUISSON, Dictionnaire de pédagogie).

La monnaie, en particulier par des problèmes d'échanges, peut aussi être considérée comme l'un des cas d'une autre catégorie importante de problèmes simples contextualisés : les conversions de grandeurs. Elles peuvent être un peu abordées en C.P.-C.E.1 (mètres, centimètres ; litres, centilitres) mais devront surtout être abondamment pratiquées au cycle 3, jusqu'à permettre de trouver mentalement combien d'éléments d'un demi-décamètre de long sont nécessaires pour réaliser une canalisation entre deux villages distants de 7,5 km (particulièrement simple si l'on pense à convertir cette distance en décamètres –il n'y a nul besoin d'un tableau de conversion pour cela-).

REFERENCES
bibliographiques et sitographiques

Documents correspondant à l'ensemble de cette conférence

- Programmes officiels (2002, 2007, 2008)
- Documents d'application et d'accompagnement
- « Socle »
- Programme de 1945, Instructions http://bregeonj.perso.cegetel.net/Programmes_primaire1945.pdf
- Académie des Sciences: avis sur la place du calcul dans l'enseignement primaire, janvier 2007 – http://www.academie-sciences.fr/actualites/textes/calcul_23_01_07.pdf
- A.G.I.E.M. – « *Découvrir le monde à l'école maternelle : vers les mathématiques* » – CD-ROM coll. « les outils de l'AGIEM » – 2005 http://www.ageem.fr/pdf/DP118.pdf (dossier pédagogique de présentation)
- BERDONNEAU C. - « *Quels contenus mathématiques en maternelle, de la Section des Tout-Petits à la Section des Grands* » – Conférence au C.D.D.P. du Havre, 1er février 2006 – http://ecoles.ac-rouen.fr/montivi/new/file/berdonneau/comfm.pdf (texte) http://ecoles.ac-rouen.fr/circ_dieppe_ouest/outils/animations/doc_animations/maternelle%20contenus%20math%E9matiques%20PS%20%E0%20GS.doc (texte, plus développé) www.ien-sannois.ac-versailles.fr/plugins/fckeditor/userfiles/file/animations07/diaporama2_dec07_Berdonneau_C1.pdf (diaporama)
- BERDONNEAU C. - « *De l'analyse de quelques items relatifs aux opérations à une proposition de programmation de l'apprentissage au Cycle 2* » – in Exploitation pédagogique des évaluations nationales, pp. 81-103 – Ministère de l'Education nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche, Direction de l'évaluation et de la prospective – 2005 - http://educ-eval.education.fr/pdf/fiche2005.pdf
- BERDONNEAU C. - « *Aider les élèves en difficulté en mathématiques* », CP/CE1 (tome 1, 2006 - tome 2, 2007) - Coll. Pédagogie pratique, Hachette Education
- BUISSON F. - « Calcul intuitif » – in Dictionnaire de pédagogie d'instruction primaire, Hachette, 1887(Tome 1 de la première partie, pages 316 à 317) – http://michel.delord.free.fr/fb-calcintuit.pdf
- DEHAENE S. – La bosse des Maths - Odile Jacob - 1996, 2003

Documents où trouver des comptines numériques
(liste non exhaustive)

- CHANTRAINE J. – « *Fichier Comptines* » - Nathan
- TREMOUROUX-KOLP O. – Le chemin des comptines – Labor
- C.D.D.P. du Haut-Rhin : les comptines numériques (Compilation effectuée par les collègues de maternelle d la Circonscription de Mulhouse 2 : un nombre impressionnant de comptines numériques où les nombres sont énumérés dans l'ordre, à l' « envers »…) - http://www.crdp-strasbourg.fr/cddp68/maternelle/comptn00.htm
- TARDIEU J. – « *Il était une fois, deux fois, trois fois* » ou « *La table de multiplication en vers* » (1947), in « *Je m'amuse en rimant* » – Gallimard, Folio cadet
- Et des « à la manière de » proposés par des élèves - http://ecoles.ac-rouen.fr/levillain/spip.php?article112